

EFECTO CASIMIR ESCALAR EN UN UNIVERSO CON FORMA TOROIDAL $T^3 \times R^1$

Diego Fernando Cardona Pineda

Facultad de Ingenierías
Programa de Ingeniería Física
Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, 2018

EFECTO CASIMIR ESCALAR EN UN UNIVERSO CON
FORMA TOROIDAL $T^3 \times R^1$

TRABAJO DE GRADO
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Ingeniero Físico

PRESENTA:
Diego Fernando Cardona Pineda

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Hector Ivan Arcos Velasco

Facultad de Ingenierías
Programa de Ingeniería Física
Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, 2018

Agradecimientos

Agradezco primero que todo a mis padres, por darme todo su apoyo desde siempre en las diferentes decisiones que he tomado y en los objetivos que he decidido plantearme. También agradezco a mis hermanos y familiares más cercanos, los cuales siempre estuvieron relacionados de una forma u otra con mi proceso formativo. Además, agradezco a mi director de tesis por su tiempo y sus conocimientos brindados que aumentaron mi motivación para culminar este trabajo y seguir en el campo de la física teórica.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	2
1. Marco Teórico	4
1.1. Teoría cuántica de campos	4
1.1.1. Segunda Cuantización	5
1.1.2. Divergencias	5
1.1.3. La función Zeta de Riemann	6
1.1.4. Valores propios de un operador diferencial	6
1.2. Renormalización	7
1.2.1. Valores propios para la ecuación de Klein-Gordon sin masa	8
1.3. Efecto Casimir	9
1.3.1. Energía generada por un campo escalar	9
1.3.2. Dependencia dimensional	10
1.3.3. Aplicaciones	11
1.4. La cosmología del efecto Casimir	12
2. Estado del Arte	13
2.0.1. Efecto Casimir en placas paralelas	13
2.0.2. Efecto Casimir para un Toro T^3	14
3. Efecto Casimir escalar en la forma $T^3 \times R^1$	19
3.1. Calculo de las energías	19
3.2. Casos especiales	23
3.2.1. Valores propios pares $n=2n$	23
3.2.2. Valores propios para $n=2n+1$	24
3.2.3. Expansión muy grande del Toro en todas sus dimensiones	26
3.3. Análisis de resultados	28
3.3.1. Comparación con la energía oscura observada	28
3.3.2. Deformación de la variedad	29
3.3.3. Inestabilidad de la energía	31
4. Conclusiones	33

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
5. Bibliografía	34
A. Función Gamma	36
B. Identidades para la función Zeta de Riemann	37
C. Cálculo de la energía Casimir	40

Resumen

Se buscó argumentar la energía oscura como un resultado de fluctuaciones cuánticas relacionadas con el efecto Casimir, que se dio al considerar la topología del universo con forma de Toro. Además, se llevaron acabo diferentes condiciones de frontera para poder inducir tanto el signo como el valor aproximado que se puede obtener de manera observacional de la energía oscura. En particular se consideró que el campo contenido dentro de la variedad $T^3 \times R^1$ era de carácter escalar, dando como resultado energías en función de las dimensiones. Dichas energías, se obtuvieron de forma finita mediante la técnica de renormalización definida por la función Zeta de Riemann ζ .

Introducción

El paradigma de la inflación, asume un periodo de expansión acelerada del universo conducido por el inflatón, un campo escalar homogéneo hipotético. El campo inflatón, ha sido postulado como el responsable de la inflación producida en el universo en su etapa más temprana. De esta forma, el trabajar con un campo escalar es una idea útil a la hora de considerar gran parte del contenido en el universo, el cual puede proporcionar resultados reales en las mediciones de energías como la Casimir.

Ahora bien, los modelos de inflación predicen que la densidad del universo es cerrada al valor crítico, que la geometría del universo es plana y la radiación de fondo de microondas (CMB por sus siglas en ingles) afirman que el universo es isótropo y homogéneo[14].

El hecho de que el universo se este expandiendo, esta bien sustentado por estudios sobre supernovas de tipo Ia[8]. Este hecho, además confirma que dicha aceleración es positiva y va en controversia con la teoría generala de la relatividad que propone un universo dominado por materia ó radiación acelerada de manera negativa debido a la atracción gravitacional. La fuente de dicha aceleración, es atribuida a la energía oscura.

Distintos datos y observaciones astronómicas, hechas principalmente por la sonda espacial de la NASA conocida como WMAP, revelan que la densidad de energía del universo está distribuida como sigue: 4 % corresponde a la materia bariónica (u ordinaria), 20 % a la materia oscura y el 76 % a la energía oscura. De esta forma, causas de la expansión actual del universo, es en gran medida atribuida a la energía oscura por su gran contenido en el universo. Pero dicha energía, al ser desconocida, crea un gran problema para la cosmología actual. Una primera solución, puede ser el considerar la energía oscura como efectos puramente geométricos del universo. Esta postulación, considera una gravedad denominada $f(R)$, en la cual se consideran términos no lineales en la curvatura escalar

Otro tipo de solución, es considerar la energía oscura como efecto de las fluctuaciones asociadas al vacío cuántico, hecho que cuadra de gran manera con la energía de Casimir tratada aquí.

En este trabajo, se consideran varios aspectos tenidos en cuenta para estudios cosmológicos importantes, tales como adoptar un espacio vacío ($\rho = 0$) por comodidad, además a gran escala el universo observable no cubre la totalidad

del universo. También, se tiene en cuenta el universo como un espacio-tiempo plano con curvatura constante. Además, se sabe que la parte espacial del universo no tiene una 3-variedad bien definida que lo represente y se desconoce si el universo es conexo, pero según el modelo estándar del Big Bang, si se postula que el universo no tiene cotas espaciales pero debe ser espacialmente finito (compacto). Todo lo anterior, da lugar para considerar el universo como una forma Toroidal.

Basados en las anteriores condiciones, el cálculo de las energías de Casimir que surgen, pueden ser un argumento de peso para solucionar el problema de energía oscura.

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1. Teoría cuántica de campos

Con la llegada de la teoría cuántica, cuyo desarrollo se vio a inicios y mediados del siglo XX, en la física se vio la necesidad de adaptar los trabajos relacionados con campos clásicos a dicha teoría; Es así, como se da el surgimiento de la teoría cuántica de campos o QFT por sus siglas en ingles, de esta manera cuando se adaptan los postulados cuánticos a la teoría clásica de campos, decimos que se hace una segunda cuantización del campo clásico la cual explicaremos más adelante, pero tiene total relación con tomar los diferentes grados de libertad clásicos en el espacio tiempo y convertirlos en operadores actuando en el espacio de Hilbert. Hay que recordar que en campos clásicos, los grados de libertad se extendían hasta ser infinitos y en QFT sucede la misma idea, por lo cual esto genera ciertas divergencias en las cantidades físicas que serán analizadas en posteriores desde el punto de vista de la función Zeta de Riemann.

La teoría cuántica de campos, radica parte de su importancia en la inclusión de que las leyes de la naturaleza deben ser construidas con un carácter local. Por ejemplo, si se analiza el caso de la ley de Coulomb y de atracción gravitacional de Newton, predican de que la fuerza entre cargas y planetas cambia de forma instantánea si cambia la distancia entre éstos, hechos que son resueltos de manera local por las teorías de campo de Maxwell y Einstein respectivamente.

Uno de los grandes logros, resultado de la teoría cuántica de campos, fue desarrollado por Paul M. Dirac, quién en la famosa ecuación que hizo y lleva su nombre predice la existencia de anti-partículas, lo cual conlleva a entender que en la naturaleza se crean y se destruyen partículas. Hecho que fue comprobado experimentalmente y que hace comprender que las partículas no son indestructibles como se creía en tiempos pasados[10].

1.1.1. Segunda Cuantización

Al iniciar el estudio de la mecánica cuántica, es muy común partir analizando el caso de una sola partícula, mediante operadores que surgen de las variables dinámicas de la ecuación de Schrödinger. Dicho tratamiento de los sistemas, se dice que es referido a la primera cuantización donde además, se consideran las interacciones entre partículas masivas cuyas energías cinéticas son demasiado bajas como para generar la aparición de partículas nuevas. Sin embargo, cuando se trata de altas energías y un continuo de partículas, ya sea por la producción de partículas individuales (en sistemas donde no se conserva el número de partículas como piones neutrales), o la producción de pares partícula-antipartícula (donde las cantidades de partículas si son conservadas), la primera cuantización falla y es por esto que es necesario desarrollar un formalismo donde se considere la creación y aniquilación de partículas, a dicho formalismo se le conoce como segunda cuantización [7].

1.1.2. Divergencias

Al pasar de un límite finito a uno continuo, surgen una serie de problemas relacionados con la interacción de un campo consigo mismo. Recordemos que para sistemas que son discretos, sus cantidades físicas se encuentran bien definidas, pero en el momento en que se va a pasar a una teoría de campos, que se define como una serie de puntos que se hacen tan cercanos que sus distancias tienden a cero y tantos que tienden a una cantidad infinita, surgen una serie de infinitos matemáticos los cuales van en contradicción con la realidad [7]. Es en este punto donde entra en juego una serie de herramientas matemáticas en busca de eliminar las divergencias, lo cual se conoce como renormalización.

Antes de profundizar más sobre los métodos para eliminar las divergencias, hay que resaltar dos tipos de divergencias, la primera es la ultra-violeta, la cual se da debido a frecuencias muy altas (o distancias muy pequeñas) que resultan en infinitos y es algo más complicada de solucionar, el origen se da al asumir que en estas teorías son válidas escalas arbitrariamente pequeñas y se les corresponden energías arbitrariamente grandes, lo cual es claramente absurdo [10].

El segundo tipo de divergencia es la infra-roja, la cual hace referencia a espacios infinitamente grandes, lo cual es muy común en teorías cosmológicas al considerar el espacio-tiempo sin un límite definido. Es usual eliminar dicha divergencia delimitando de manera finita el sistema físico a trabajar, lo cual es un pilar fundamental en el efecto Casimir.

1.1.3. La función Zeta de Riemann

La función Zeta de Riemann, es una suma que se encuentra definida para valores complejos con parte real mayor que uno $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, por lo general se encuentra representada mediante la siguiente serie de Dirichlet:

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (1.1)$$

Esta función toma verdadera importancia en matemáticas, en la representación de la distribución de los números primos que fue planteada por Leonhard Euler, Sin embargo en el campo de la física, será suficiente la función dada en la ecuación (1.1), si el lector requiere mayor información puede ir a [11].

Uno suele formar la función zeta en forma general, del operador diferencial que aparece en la integral de acción para un campo escalar. La función zeta de Riemann, es una función meromorfa, es decir holomorfa excepto en ciertos puntos, y por esto su gradiente en el origen está dado por el determinante del operador.

De manera más amplia, podemos expresar la función zeta (ζ) como una transformada de Mellin del Kernel de la ecuación de calor, la cual describe la difusión sobre una variedad del espacio-tiempo de cuatro dimensiones en una dimensión temporal (3+1)[12].

1.1.4. Valores propios de un operador diferencial

Así pues, como hemos dicho definamos la forma que toma la función Zeta para nuestros propósitos.

Definimos la acción para un campo escalar no interactivo bajo condiciones externas como:

$$I[\phi] = -\frac{1}{2} \int_M \phi(x)(\Delta - V(x))\phi(x) dx \quad (1.2)$$

Donde se entiende ϕ como el campo escalar en un potencial base $V(x)$ y una variedad Riemanniana M con la forma $M = S^1 \times M_s$. Aquí, hemos pensado a S^1 , como un círculo de radio β que nos sirve para describir una temperatura finita $T = \frac{1}{\beta}$ y a M_s como la variedad Riemanniana con fronteras definidas[9].

En nuestro estudio, la propiedad que más nos interesa es la energía Casimir, la cual viene descrita por medio de funcionales que son integrales de sumas sobre historias o integrales de Feynman, que son expresiones que toman la forma:

$$Z[V] = \int e^{-I[\phi]} D\phi \quad (1.3)$$

Aquí no hemos puesto la constante de normalización infinita y la integral se lleva acabo sobre todos los campos que satisfacen las condiciones de frontera.

Podemos definir a Z de tal forma que quede en términos del determinante del operador perteneciente al argumento de su exponente[9,12] $Z = (\det P)^{-\frac{1}{2}}$ con $P = -\Delta + V(x)$, y a su vez evaluar esto de la siguiente manera:

$$\Gamma[V] = -\ln Z[V] = \frac{1}{2} \ln \left\{ \det[(-\Delta + V(x))/\mu^2] \right\} \quad (1.4)$$

Donde Γ es llamada la acción efectiva y μ es un parámetro de masa para ajustar el argumento del logaritmo.

La expresión dada en (1.4) nos muestra el tipo de problemas recurrentes en teoría cuántica de campos, y es que los valores propios crecen de manera desenfrenada a medida que $n \rightarrow \infty$ es decir:

$$\ln \det P = \sum_{n=1}^N \ln \lambda_n = -\frac{d}{ds} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-s} \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \zeta_P(s) \Big|_{s=0} = -\zeta'_P(0)$$

Siendo P una matriz hermítica con valores propios λ_n .

1.2. Renormalización

De esta forma podemos asociar la función zeta de Riemann al operador diferencial P , el cual puede ser en general un laplaciano cuatro dimensional o el D'Alembertiano y podemos representar de manera más amplia y similar a (1.1) como:

$$\zeta_P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \quad (1.5)$$

Siempre y cuando s sea grande y en nuestro caso para cuatro dimensiones, la serie converge para $Re(s) > 2$. Además, puede ser extendida de manera analítica a una función meromorfa con polos unicamente en $s=1,2$.

Con la expresión (1.5) queda claro, que existe una divergencia considerable al tratar el funcional Z , que a fin de cuentas resulta también siendo la función de partición de sistema. De allí que la cantidad estudiada $\Gamma[V]$ se le conoce como la acción efectiva, que depende de la influencia de campos externos V y de ésta, podemos obtener la energía Casimir cuando derivamos con respecto a la variable β de temperatura.

Hemos hablado de la integral de caminos Z como la misma función de partición, hecho que es válido sólo si consideramos campos que son periódicos en tiempos imaginarios $\tau = it \in S^1$, en alguna condición de límite a grandes

distancias con periodo β .

Así pues, si el contenedor del campo es lo suficientemente grande comparado con la longitud de onda β , se puede aproximar la dependencia espacial de las funciones propias por ondas planas con condiciones de frontera periódicas y así se obtienen valores propios de la forma:

$$\lambda_n = (2\pi\beta^{-1}n)^2 + k^2 \quad (1.6)$$

Recalquemos que estamos considerando la energía de Casimir para la temperatura cero $\beta \rightarrow \infty$.

1.2.1. Valores propios para la ecuación de Klein-Gordon sin masa

En el estudio del efecto Casimir para nuestro caso, nos hemos valido de la ecuación de Klein-Gordon (KG) para evaluar la dinámica del campo escalar. Es bien sabido que dicha ecuación lleva consigo operadores diferenciales, entre ellos el operador de Laplace y un operador diferencial temporal de segundo orden, todo esto aplicado sobre una variedad M que puede contener a su vez un limite ∂M . Este tipo de operadores, que llamaremos A , puede ser escrito de la forma:

$$A = -g^{jk}\nabla_j^V\nabla_k^V - E$$

En donde definimos g^{jk} como la métrica de la variedad M , ∇_j^V es el elemento diferencial que dentro de M actúa como un paquete de vectores V haciendo un recorrido suave sobre M y E es una transformación de V en sí mismo, es decir un endomorfismo[9]. Dicho operador esta definido de manera usual, como hermitico de tal forma que sus observables sean valores reales.

Si trabajamos sobre un campo Φ_n con condiciones de contorno bien definidas de manera conveniente, podemos obtener tanto valores propios λ_n como funciones propias del este:

$$A\Phi_n = \lambda_n\Phi_n \quad (1.7)$$

Siendo más exactos en nuestra definición, de la ecuación K-G en un espacio-tiempo plano tenemos el operador $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, donde se han tomado unidades naturales $c = 1$. Por lo cual re definiendo el operador A :

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - g^{jk}\nabla_j^V\nabla_k^V \quad (1.8)$$

Con τ el tiempo imaginario en S^1 con periodo β y el operador laplaciano sobre M_s definido en 1.1.4 para la ecuación (1.2).

De (1.8) se pueden obtener valores propios de la forma:

$$\Phi_{k,n}(\tau, x) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{2\pi ni}{\beta} \tau} \phi_k$$

En situaciones en las cuales los valores propios se obtienen de manera explícita, la función zeta puede ser calculada de manera analítica. Recordemos que establecimos la condición de que para tiempos imaginarios τ con periodo β podemos obtener valores propios como en (1.6), de esta forma la función zeta dada en (1.5) toma la forma de:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} ((2\pi\beta^{-1}n)^2 + k^2)^{-s} \quad (1.9)$$

1.3. Efecto Casimir

1.3.1. Energía generada por un campo escalar

La importancia que habíamos mencionado sobre la acción efectiva (1.4), se hace presente en el hecho de que como mencionamos esta relacionada directamente con la integral de caminos para los diferentes campos, pero que cuando se plantea un sistema tal que cuente con un tiempo imaginario de periodo β lo suficientemente grande, la integral resultaba siendo la función de partición del sistema. De allí, que podamos obtener toda una serie de resultados fundamentales cuando partimos desde un análisis de ensamble canónico, como es el siguiente:

$$E = \frac{\partial}{\partial \beta} \Gamma[V] = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \zeta'_{P/\mu^2}(0) \quad (1.10)$$

Y según las consideraciones dadas para nuestro sistema $\beta \rightarrow \infty$ en donde la temperatura es mínima $T = 0$, podemos encontrar la energía Casimir:

$$E_{Cas} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} E \quad (1.11)$$

Haciendo el análisis de (1.10) y luego (1.11), encontramos la importancia de haber impuesto dichas condiciones temporales, ya que nuestros cálculos se basarán en la influencia de los valores propios espaciales.

Por esto, para una teoría cuántica de campos en donde se considera un campo escalar libre, al tratar solamente con el operador laplaciano, resulta que los valores propios de dicho operador son los cuadrados de las energías de las fluctuaciones cuánticas

$$\nabla^2 \Phi = E^2 \Phi$$

Y de esta forma terminamos definiendo la energía Casimir como las contribuciones de dichas energías (valores propios) del campo (**Ver Apéndice C**):

$$E_{Cas} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \zeta_P \left(-\frac{1}{2} \right) \quad (1.12)$$

La expresión anterior diverge para los λ_k , pero sólo es de carácter formal donde hace referencia a que se considera la inclusión de todos los valores propios del campo y toma un valor significativo y convergente cuando $\zeta(-1/2)$.

1.3.2. Dependencia dimensional

Cuando se hace un exhaustivo análisis del estrés generado por el efecto Casimir, por ejemplo para placas paralelas unidimensionales, se concluye que el signo no puede ser definido con anterioridad a los cálculos finales. Todo esto a causa de que las expresiones de partida, son totalmente formales, las cuales requieren de una regularización y una extracción cuidadosa de infinitos, antes de que un resultado de carácter mensurable sea encontrado.

Sin embargo, haciendo un análisis por ejemplo de varios sistemas de placas con consideraciones geométricas unidimensionales, la fuerza resultante es de carácter atractiva (signo negativo) [5] sin importar el tipo de campo considerado. Lo cual concuerda, con el modelo de Van der Waals de atracción entre moléculas, del cual en un principio se valió el físico Hendrik Casimir para no considerar elementos discretos si no todo un continuo, como es el caso de una placa conductora.

Situaciones totalmente diferentes surgen cuando se llevan los cálculos sobre una esfera de radio a [1], donde los resultados vienen siendo de carácter repulsivo para el estrés(S):

$$S_{esfera} = \frac{\hbar c}{a^2}(0,04618)$$

Estas y otras configuraciones, muestran la existencia notable de la dependencia dimensional del efecto, cuyos valores no solo dependen de la forma geométrica.

Un caso que es de notable importancia y no solo implica la dimensionalidad, es el de placas paralelas conductoras separadas una distancia a , pero que se encuentran sumergidas en un espacio D-1 dimensional. Donde se nota que el pasar de un campo escalar a uno electromagnético, implica que el estrés (\mathcal{F}) del segundo campo es un medio del primero, lo cual hace referencia a que según el modelo electrodinámico la contribución es un medio del original.

$$\mathcal{F}_{escalar} = -\frac{\pi^2}{96a^2}$$

$$\mathcal{F}_{em} = -\frac{\pi^2}{240a^2}$$

Cabe también resaltar el modelo con forma de esfera y con condiciones de frontera de Dirichlet en D dimensiones[1][5], en dicho modelo, el estrés de Casimir

se desvanece a medida que la dimensión es muy grande $D \rightarrow \infty$ y también cuando D es de valores negativos inclusive valores enteros. También, es de resaltar en dicho modelo que el estrés en los polos simples es positivo, para incluso también valores enteros de D .

Con estos análisis, queda pues aun sin resolver la naturaleza general que tendría el efecto sobre una determinada estructura geométrica. Por lo pronto, lo más conveniente es hacer un “catálogo”, en relación a la naturaleza atractiva o repulsiva, que contenga los diferentes resultados según las configuraciones dadas.

1.3.3. Aplicaciones

Debido a la arraigada relación existente entre el efecto Casimir y las fuerzas de Van der Waals [5], esta claro que este fenómeno físico tiene un carácter que puede ser aplicable en lo cotidiano y entendible, no solo para personas interesadas en teoría cuántica de campos.

En la actualidad, el campo de la nanotecnología es uno de los que se ve más influenciado, debido a que en la escala a la que se trabaja, los efectos cuánticos son más relevantes.

En los instrumentos de la microelectrónica, se sabe que el efecto Casimir es el responsable del 10 % de las fuerzas encontradas [9], que de una u otra forma perjudican o benefician dicha línea de estudio.

En la actualidad, se podría buscar la utilidad de este efecto para generar dispositivos que se valgan de la energía resultante.

Así pues, el efecto Casimir es un tema interdisciplinario.

En física de materia condensada, el efecto Casimir es el responsable de la atracción o repulsión de ciertos materiales, según sea su geometría, forma y propiedades mecánicas o eléctricas.

En física atómica, las interacciones del efecto Casimir, son necesarias para la corrección en las líneas espectrales de Rydberg.

Para nuestro estudio, en teoría cuántica de campos, también en cosmología, astrofísica y también gravitación, el efecto hace contribuciones a la teoría de los hadrones en la cromodinámica ya que presenta esenciales contribuciones a la energía total del nucleón. A su vez, la polarización del vacío en el universo por la energía Casimir, puede conducir a un proceso de inflación.

Otro de los aspectos de gran importancia, es el resultado matemático debido a este efecto, ya que promueve el desarrollo de métodos de renormalización basados, en nuestro caso, en la función zeta de Riemann y las funciones de Green.

1.4. La cosmología del efecto Casimir

Como ya se mencionó, uno de los grandes problemas de la cosmología moderna, es el argumentar el por qué de la expansión acelerada del universo. A dicho problema, se le atribuyen o efectos gravitacionales globales, en donde la gravedad a grandes distancias funciona de manera diferente y por lo tanto debe ser modificada, ó que existe una sustancia en el universo desconocida a la cual se le llama energía oscura, la cual tiene la capacidad de contrarrestar efectos gravitacionales y provocaría que las galaxias se repelieran en lugar de atraerse.

Si se elige la energía oscura como respuesta a lo expuesto, se debe preguntar entonces en qué consiste dicha entidad. Se proponen como alternativas: la energía del espacio vacío y la quintaesencia [16]. Cabe resaltar que, pensar en la energía del vacío, es igual a postular la constante cosmológica de Albert Einstein en sus ecuaciones de campo.

Según los conceptos propios de la Teoría Cuántica de Campos, el vacío no es la nada, sino un lugar activo de pares partícula y antipartículas, llamadas partículas virtuales, el cual aparece y en una fracción de segundo se aniquila. Ya que la masa, responsable de efectos gravitacionales, esta relacionada con la energía, la creación de partículas virtuales genera una correspondiente energía, la cual puede ser causante de efectos gravitacionales, los cuales a diferencia de la masa pueden ser de carácter repulsivo ó contractivo.

Así pues, en la física de partículas, la constante cosmológica aparece como la densidad de energía del vacío.

Según las observaciones, el valor estimado para la energía oscura es:

$$\rho_{EO} \approx 10^{-26} Kg/m^3 \approx 10^{-47} GeV^4 \quad (1.13)$$

en unidades naturales.

Para este trabajo, se propone como respuesta a dicha entidad misteriosa (Energía Oscura) la energía de Casimir.

La energía de Casimir, es generalmente la energía del vacío de la parte libre de los sistemas dinámicos. Dicha energía depende de las condiciones de borde y de la topología del sistema, lo cual es causado por las fluctuaciones cuánticas en el espacio confinado.

Si la energía Casimir concuerda con los datos recopilados para la energía oscura y además muestra un claro carácter expansivo (repulsión a la gravedad) es un claro candidato para aclarar la gran incógnita de la expansión del universo.

Capítulo 2

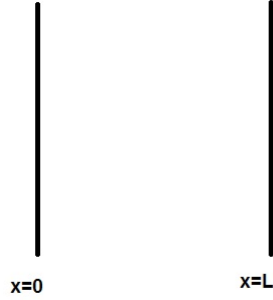
Estado del Arte

2.0.1. Efecto Casimir en placas paralelas

En esta sección, se presenta el primer modelo del que partió Hendrik Casimir, el cual trata de dos placas paralelas tomadas unidimensionalmente.

Se sabe, que Casimir en el año de 1948 cambió el enfoque que se tenía hasta la fecha, de la acción a distancia entre moléculas (fuerza de Van der Waals) por la acción local entre campos[5].

En principio, en lugar de relacionar dos moléculas, se tomo un medio continuo el cual fue constituido por dos placas paralelas separadas por una distancia L .



Placas paralelas, separadas por una distancia L en la dimensión x .

Si consideramos que las placas se encuentran dentro de un campo escalar $\varphi(t, x)$ en el intervalo $0 < x < L$ y obedeciendo condiciones de frontera.

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = 0 \quad (2.1)$$

Dicho caso, es la representación más clara de la manifestación del efecto Casimir.

Para describir la dinámica de un campo escalar, nos valemos de la ecuación de Klein-Gordon para una metrica plana:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(t, x) = 0$$

Siendo m la masa del campo.

Solucionando el campo con las condiciones de frontera dadas en (2.1) y sin normalizar, obtenemos:

$$\varphi(t, x) = e^{\alpha t} \sin k_n x$$

donde se ha considerado un campo sin masa, α depende de condiciones de frontera periódicas en el tiempo pertenecientes al espacio S^1 y $k_n = \frac{\pi n}{L}$ que se puede reescribir como $\omega = |k_n|$.

Así pues, tomando el valor propio cuadrado del espacio para (1.5) y llevándolo a ser como (1.12) obtendríamos la energía fundamental:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \right]^{-s} \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{2} \zeta \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{\pi n}{L} \right) = \frac{\pi}{L} \zeta(-1) \\ \varepsilon_0 &= -\frac{\pi}{12L} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde la suma indica que se toman todas las frecuencias en el espacio. Considerando para todo lo anterior unidades naturales $c = \hbar = 1$ y llevando a cabo un cálculo mas para encontrar el estrés, tenemos:

$$\mathcal{F}(L) = -\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial L} = -\frac{\pi}{12L^2} \tag{2.3}$$

De (2) y (3), podemos deducir una clara dependencia dimensional de la energía y fuerzas resultantes, también, el signo negativo en los resultados implica que las placas generan una atracción entre estas, la cual mientras más cercanas estén, mayor será.

Con dicho análisis, se fundamenta el efecto, así en general definimos el efecto Casimir como el estrés (Fuerza por área) sobre una superficie con fronteras bien definidas, cuando un campo es confinado en un volumen finito del espacio. La superficie puede ser descrita por un medio material, con propiedades electromagnéticas tales como dieléctrico, en dicho caso el campo existe en ambos lados de la superficie [5].

2.0.2. Efecto Casimir para un Toro T^3

Consideremos para empezar la solución de una variedad T^3 (2+1 dim), que consiste en la superficie de un toro con una dimensión extra periódica correspondiente al tiempo con periodo β . Dicho sistema, puede imaginarse al partir

de un rectángulo bien delimitado en el espacio cartesiano de dos dimensiones, que al considerar condiciones periódicas para cada uno de sus bordes termina convertido en la superficie de un toro como se muestra en la figura siguiente:

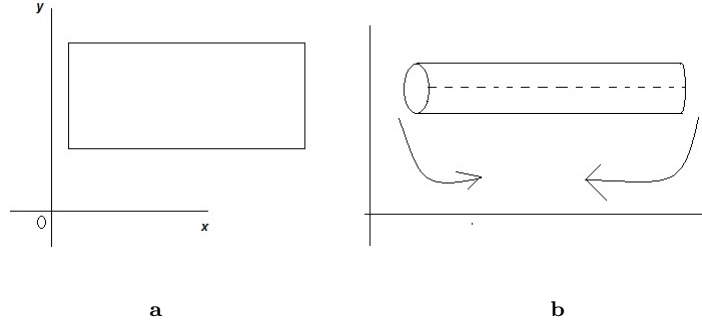


Figura 1: Bosquejo de la forma de un toro a partir de un rectángulo en dos dimensiones, que se une en sus partes más largas para formar un cilindro y después los extremos se unen para formar el toro.

Así pues, consideramos que los bordes del con respecto al eje x se encuentra empezando desde 0 hasta L_1 y en el eje y va desde 0 hasta L_2 . Vamos a considerar para dicho caso condiciones periódicas no solo en el tiempo sino también en el espacio, también tenemos en cuenta que vamos a trabajar según el comportamiento de un campo escalar en dicho sistema, por lo cual trabajaremos con la ecuación de Klein-Gordon como se menciona en capítulos anteriores, debido a que trabaja muy bien la dinámica de un campo escalar.

De esta forma tenemos:

Condiciones de frontera:

$$\phi(0, x, y) = \phi(\beta, x, y)$$

$$\phi(t, 0, y) = \phi(t, L_1, y)$$

$$\phi(t, x, 0) = \phi(t, x, L_2)$$

Resolviendo para la ecuación de Klein-Gordon sin masa para un espacio-tiempo plano:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{con } \phi = \phi(t, x, y)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Resolviendo ϕ con las condiciones de frontera dadas:

Se propone la siguiente solución:

$$\phi(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)X(x)Y(y)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T(t)X(x)Y(y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T(t)X(x)Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

Dividiendo multiplicando a ambos lados por $T(t)X(x)Y(y)$ y dejando la variable dependiente al tiempo en el lado izquierdo tenemos:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

Ambos lados pueden ser igualados a una constante de separación α quedando:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \alpha \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \alpha \quad (2.5)$$

Resolviendo (1) tenemos:

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - \alpha T(t) = 0$$

$$m^2 - \alpha = 0 \quad m^2 = \alpha \quad \text{si } \alpha = -r^2 \quad ; r \in \mathbb{Z}^+$$

$$m = \pm ri$$

Tomando la parte positiva se tiene la siguiente solución:

$$T(t) = ce^{rit}$$

Según las condiciones de frontera periódicas se tiene:

$$T(0) = 1 = T(\beta) = e^{ri\beta}$$

$$1 = \cos r\beta + i \sin r\beta$$

Luego para que el lado derecho sea igual a 1 los argumentos deben ser:

$$r\beta = 2\pi n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma la solución general normalizada queda:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{\frac{2\pi n}{\beta} it}$$

Llevando acabo los mismos pasos para la ecuación (2) llegamos a:

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{L_1}} e^{\frac{2\pi n_1 i}{L_1} x}$$

$$Y(y) = \frac{1}{\sqrt{L_2}} e^{\frac{2\pi n_2 i}{L_2} y}$$

Finalmente la solución general al campo es:

$$\phi(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\beta L_1 L_2}} e^{\frac{2\pi n}{\beta} i t} e^{\frac{2\pi n_1}{L_1} i x} e^{\frac{2\pi n_2}{L_2} i y}$$

Tomando los valores propios al cuadrado de las soluciones espaciales del campo, para introducirlos en la siguiente expresión:

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-s} \quad (2.6)$$

Lo anterior con el fin de regularizar dichos valores propios, que a fin de cuenta son las energías, para así encontrar la energía total (ver sección 1.3.1). Esto se logra, al tomar la anterior expresión como:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \zeta(-1/2)$$

así pues tenemos:

$$\zeta(s) = \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 \right]^{-s}$$

n_1 y n_2 pueden ser tomados iguales a n ya que pertenecen al mismo conjunto de los enteros:

$$\begin{aligned} &= \sum_n^{\infty} n^{-2s} \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{-s} \\ &= \zeta(2s) \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{-s} \\ &= (2\pi)^{-2s} \zeta(2s) \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^{-s} \end{aligned}$$

Entonces, para la energía ε_0 tenemos que $\frac{1}{2} \zeta(-\frac{1}{2})$:

$$\frac{1}{2} \zeta(-\frac{1}{2}) = \varepsilon_0 = \frac{(2\pi)}{2} \zeta(-1) \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Siendo $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$

$$\varepsilon_0 = \pi \left(-\frac{1}{12} \right) \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ε_0 :estrés $\frac{[Energia]}{[Area]}$

$$\varepsilon_0 \simeq -0,261799 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

El que la energía de negativa, muestra un sentido contractivo entre la superficie del toro, es decir que este se esta atrayendo dentro de si. En general para una variedad toroidal, las energías Casimir resultan ser negativas, hecho que será ampliamente analizado en posteriores capítulos, ya que buscamos que dicha energía sea de carácter repulsivo, lo cual se interpreta como un universo en expansión, que a fin de cuentas es la característica que se observa.

Capítulo 3

Efecto Casimir escalar en la forma $T^3 \times R^1$

3.1. Cálculo de las energías

Basados en el desarrollo anterior, podemos hallar de manera similar la energía de Casimir, para esto consideremos poder controlar una dimensión más (en este caso z) en el toro.

Tendremos en cuenta diferentes condiciones de frontera y condensaremos en una tabla los resultados, incluyendo el de T^3

Antes de comenzar, en el siguiente esquema se presenta la dependencia de círculos en la geometría del toro, los cuales según se indique varían en tender a ser muy grandes o no.

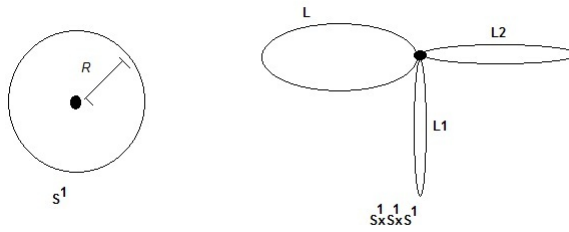


Figura 2: Para una dimensión dada, la condición de periodicidad puede implicar que ésta se encuentre contenida en un círculo en el plano cartesiano. En la figura de la derecha, se puede ver que una de las dimensiones periódicas del toro relacionada con L tiende a ser muy grande $L \rightarrow \infty$, mientras que las demás se mantienen en una forma estándar

Partiendo del caso anterior T^3 y sumándole una dimensión más en la cual la condición de frontera es de anular el campo en los bordes, tenemos $T^3 \times R^1$

$$\phi(t, x, y, 0) = \phi(t, x, y, L_3) = 0$$

Con esta obtenemos la solución general:

$$\phi(t, x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\beta L_1 L_2 L_3}} e^{\frac{2\pi n_1}{\beta} i t} e^{\frac{2\pi n_1}{L_1} i x} e^{\frac{2\pi n_2}{L_2} i y} \sin \frac{\pi n_3}{L_3}$$

Luego, reemplazando de nuevo en la función zeta de riemann, para valores propios de la solución del campo:

$$\zeta(s) = \sum_{n_1, n_2, n_3}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s}$$

Las dimensiones x y y al construir el toro, van relacionadas con el radio interior y el exterior (L_1, L_2), mientras que la variable z va relacionada con el grosor. Así pues, si se hace tender a infinito L_1 y L_2 , se puede restaurar la forma de placas paralelas dentro del toro.

Con lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} & \lim_{[L_1, L_2] \rightarrow [\infty, \infty]} \zeta(s) \\ &= \sum_{n_3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s} dn_1 dn_2 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$k_1 = \frac{2\pi n_1}{L_1} \quad k_2 = \frac{2\pi n_2}{L_2}$$

Obtenemos:

$$= \frac{L_1 L_2}{4\pi^2} \sum_{n_3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s} dk_1 dk_2$$

Solucionamos la integral doble, aplicando un cambio de variable a polares (k, θ) , con jacobiano igual a k :

$$\begin{aligned} &= \frac{L_1 L_2}{4\pi^2} \sum_{n_3} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} k \left[k^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s} d\theta dk \\ &= \frac{2\pi L_1 L_2}{4\pi^2} \sum_{n_3} \int_0^{\infty} k \left[k^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s} dk \\ &= \frac{L_1 L_2}{2\pi} \sum_{n_3} \int_0^{\infty} k \left[k^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s} dk \\ &= \frac{L_1 L_2}{2\pi} \frac{1}{(1-s)} \sum_{n_3} \left[k^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{1-s} \end{aligned}$$

$$= -\frac{L_1 L_2}{2\pi} \frac{1}{(1-s)} \sum_{n_3} \left[\left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{1-s}$$

Para hallar la energía fundamental, tenemos que $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\zeta(-\frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= -\frac{1}{2} \frac{L_1 L_2}{4\pi} \frac{1}{2(1+1/2)} \sum_{n_3} \left[\left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{1+1/2} \\ \varepsilon_0 &= -\frac{1}{2} \frac{L_1 L_2}{6\pi} \frac{\pi^3}{L_3^3} \sum_{n_3} n_3^3 = -\frac{L_1 L_2}{6\pi} \frac{\pi^3}{L_3^3} \zeta(-3) \end{aligned}$$

Siendo $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{L_1 L_2}{6\pi} \frac{\pi^3}{L_3^3} \frac{1}{120} = -\frac{1}{2} \frac{\pi^2 L_1 L_2}{720 L_3^3} \\ \varepsilon_0 &= -\frac{\pi^2 L_1 L_2}{1440 L_3^3} \simeq -0,0068539 \frac{L_1 L_2}{L_3^3} \end{aligned}$$

Y la fuerza Casimir es:

$$\mathcal{F}_{Cas} = -\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial L_3} = -\frac{\pi^2 L_1 L_2}{480 L_3^4}$$

Para el anterior caso pero con la dimensión z también periódica, es decir $\phi(t, x, y, 0) = \phi(t, x, y, L_3)$, tenemos que el valor de la energía es de:

$$\varepsilon_0 = -\frac{(2)^3 \pi^2 L_1 L_2}{1440 L_3^3} \simeq -0,054831 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$$

Ahora, para el caso en el cual L_3 tiende a ser un valor muy grande y todas las dimensiones tienen condiciones de frontera periódicas:

$$\zeta(s) = \sum_{n_1, n_2, n_3}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s}$$

Entonces aplicando $\lim_{L_3 \rightarrow \infty}$ y haciendo el cambio de variable $k = \frac{2\pi n_3}{L_3}$, tenemos:

$$= \frac{L_3}{2\pi} \sum_{n_1, n_2} \int_0^{\infty} \left[k^2 + \left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 \right]^{-s} dk$$

Cambiando $s = \frac{s}{2}$ tenemos:

$$= \frac{L_3}{2\pi} \sum_{n_1, n_2} \int_0^{\infty} \left[k^2 + \left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 \right]^{-\frac{s}{2}} dk$$

Solucionamos la integral usando la siguiente relación¹ para $\Re(s) > 1$:

$$\int_0^\infty dk (k^2 + \alpha^2)^{-\frac{s}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{1-s} \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)}$$

$$\text{Siendo } \alpha = \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{L_3}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 \right]^{\frac{1-s}{2}} \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)}$$

Los índices $n_1 = n_2 = n$ por lo cual se pueden extraer:

$$= \frac{L_3}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{\frac{1-s}{2}} \zeta(s-1) \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)}$$

Utilizando ahora la siguiente relación²

$$\lim_{s \rightarrow -1} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \zeta(s-1) = \frac{\zeta(3)}{2\pi^2}$$

De esta forma tenemos:

$$= \frac{L_3}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{\frac{1-s}{2}} \frac{\zeta(3)}{2\pi^2 \Gamma(s/2)}$$

Finalmente hallamos la energía Casimir como $\frac{1}{2}\zeta(-1)$ y sabiendo que $\zeta(3) = 1,2020$ (constante de Apéry) y que $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ tenemos:

$$\varepsilon_0 = -\frac{L_3}{8\pi} \zeta(3) \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right] \simeq -0,472024 L_3 \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]$$

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las energías encontradas

¹Spectrum of The Casimir effect on a torus- E. Elizalde

²Higher Transcendental Functions-Harry Bateman-CALTECH

Producto Cartesiano	Condición de frontera	Valor aproximado de la energía Casimir
T^3	periodica en (x,y)	$-0,261799 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1$	periodica en (x,y) y se anula en (z)	$-0,0068539 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	periódica en (x,y,z)	$-0,054831 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3 \rightarrow \infty}$	periódica en (x,y,z)	$-0,472024 L_3 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)$

Tabla 1

3.2. Casos especiales

3.2.1. Valores propios pares n=2n

Los cálculos resumidos en la tabla anterior, muestran de manera definitiva un valor negativo para la energía de Casimir en un Toro, sin importar las condiciones aplicadas. Por tal motivo, nos vemos obligados a presentar variaciones tales que, den un resultado positivo para las energías, lo cual concordaría con una energía expansiva.

Ahora bien, para llevar acabo la búsqueda del cambio de signo en la energía, se propone restringir los términos contadores en los valores propios del campo. Para comenzar, se toman sólo los valores entero pares.

Tabla³ de valores resumida para n par n=2n

Producto Cartesiano	Valor aproximado de la energía Casimir
T^3	$-0,523599 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1$	$-0,054831 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	$-0,438649 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3 \rightarrow \infty}$	$-0,191304 L_3 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)$

Tabla 2

³Las condiciones de frontera son iguales que las presentadas en la tabla del caso sin modificaciones

3.2.2. Valores propios para $n=2n+1$

Ahora, se proponen solamente los valores impares para los valores propios, lo cual como se verá resulta ser una apuesta mucho más interesante debido a sus resultados. En el caso anterior, cuando n resultaba ser par, solamente se agregaba un factor de 2^k con k dependiendo de las características del sistema, mientras que en la presente situación de valores impares para n , es más cuidadoso el análisis.

$$T^3$$

$$\varepsilon_0 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Corriendo la suma al evaluar en el primer valor $n = 0$ tenemos:

$$\varepsilon_0 = \pi \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \right\} \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_0 = \pi \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} \right\} \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_0 = \pi \{ 1 + 2\zeta(-1) + \zeta(0) \} \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi}{3} \left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_0 \simeq 1,047198 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T^3 \times \mathbb{R}^1$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{\pi^2 L_1 L_2}{12 L_3^3} \sum_{n_3=0}^{\infty} (2n_3+1)^3$$

Corriendo la suma al evaluar en el primer término $n_3 = 0$ tenemos:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\pi^2 L_1 L_2}{12 L_3^3} \left\{ 1 + \sum_{n_3=1}^{\infty} (8n_3^3 + 6n_3^2 + 6n_3 + 1) \right\}$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{\pi^2 L_1 L_2}{12 L_3^3} (1 + 8\zeta(-3) + 6\zeta(-2) + 6\zeta(-1) + \zeta(0))$$

$$\varepsilon_0 \simeq -0,397526 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$$

$$T^3 \times \mathbb{R}^1 : L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{\pi^3 L_1 L_2}{12 L_3^3} \sum_{n_3=0}^{\infty} 2^3 (2n_3 + 1)^3$$

$$\varepsilon_0 \simeq -3,180208 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$$

$$T^3 \times \mathbb{R}^1 : L_3 \rightarrow \infty$$

$$\varepsilon_0 = \frac{L_3}{4\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{\frac{1-s}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{1-s} \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{L_3}{4\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{\frac{1-s}{2}} \zeta_H(s-1, 1/2) \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)}$$

Donde $\zeta_H(s-1, 1/2)$ es la función zeta generalizada o función zeta de Hurwitz. Apoyado en que

$$\lim_{s \rightarrow -1} \zeta_H(s-1, 1/2) \Gamma((s-1)/2) = -\frac{3}{2} \frac{\zeta(3)}{(2\pi)^2}$$

Tenemos

$$= -\frac{L_3}{4\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{\frac{1-s}{2}} \frac{3}{2} \frac{\zeta(3)}{(2\pi)^2 \Gamma(s/2)}$$

Finalmente para la energía $s = -1$ y sabiendo que $\zeta(3) = 1,2020$ (constante de Apéry) y que $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ tenemos:

$$\varepsilon_0 \simeq 0,45075 L_3 \left[\left(\frac{1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{L_2} \right)^2 \right]$$

Tabla⁴ resumida de valores para n impar n=2n+1

Producto Cartesiano	Valor aproximado de la energía Casimir
T^3	$1,047198 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1$	$-0,397526 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	$-3,180208 \frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3 \rightarrow \infty}$	$0,45975 L_3 \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right)$

Tabla 3

3.2.3. Expansión muy grande del Toro en todas sus dimensiones

Finalmente, agregamos el caso en el cual consideramos que el toro se extiende a valores muy grandes en cada una de sus dimensiones. El resultado obtenido, genera gran interés ya que la energía toma un valor complejo, que se interpreta en manera resumida como un decaimiento muy inestable de la energía[15].

Retomando la función zeta formada a partir de los valores propios del campo:

$$\zeta(s) = \sum_{n_1, n_2, n_3}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s}$$

Cuando $\lim_{L_1, L_2, L_3 \rightarrow \infty, \infty, \infty}$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right]^{-s} dn_1 dn_2 dn_3$$

Solucionando por cambio de variable de una integral triple tenemos con $|J| = k$:

$$(n_1, n_2, n_3) \rightarrow (k, \theta, z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} k \left[(k \sin \theta)^2 + (k \cos \theta)^2 + z^2 \right]^{-s} d\theta dk dz \\
&= \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} k \left[k^2 + z^2 \right]^{-s} d\theta dk dz
\end{aligned}$$

⁴Las condiciones de frontera son iguales que las presentadas en la tabla del caso sin modificaciones

Solucionando la primera integral con respecto a θ y haciendo un cambio de variable simple $u = k^2 + z^2$ tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty 2\pi k [k^2 + z^2]^{-s} dk dz \\ &= \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty 2\pi u^{-s} du dz \\ &= \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s)} \int_0^\infty u^{-s+1} \Big|_0^\infty dz \end{aligned}$$

Recuperando la variable $u = k^2 + z^2$ y evaluando de cero a infinito

$$\begin{aligned} &= \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \int_0^\infty (k^2 + z^2)^{-s+1} \Big|_0^\infty dz \\ &= -\frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \int_0^\infty z^{s'-1} dz \end{aligned}$$

Renombrando $s = 1 - \frac{1}{2}(s' - 1)$ tenemos

$$= -\frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \int_0^\infty z^{s'-1} dz$$

Multiplicando y dividiendo en el argumento de la integral por $e^{-z} - 1$

$$\begin{aligned} &= -\frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \int_0^\infty z^{s'-1} \frac{e^{-z} - 1}{e^{-z} - 1} dz \\ &= -\frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \left\{ \int_0^\infty z^{s'-1} \frac{e^{-z}}{e^{-z} - 1} dz - \int_0^\infty (z^2)^{1-s} \frac{1}{e^{-z} - 1} dz \right\} \\ &= -\frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \left\{ \int_0^\infty z^{s'-1} \frac{1}{-(e^z - 1)} dz - \int_0^\infty z^{s'-1} \frac{1}{e^{-z} - 1} dz \right\} \end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo en la primera integral por $\frac{\Gamma(s')}{\Gamma(s')}$ y la segunda integral por $\frac{2\pi i \Gamma(1-s')}{2\pi i \Gamma(1-s')}$

$$-\frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \left\{ \frac{\Gamma(s')}{\Gamma(s')} \int_0^\infty z^{s'-1} \frac{1}{-(e^z - 1)} dz - \frac{2\pi i \Gamma(1-s')}{2\pi i \Gamma(1-s')} \int_0^\infty z^{s'-1} \frac{1}{e^{-z} - 1} dz \right\}$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones para la primera integral anterior

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Tenemos:

$$\varepsilon_0 = \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \left\{ \Gamma(s') \zeta(s') + \frac{2\pi i \Gamma(1-s')}{2\pi i \Gamma(1-s')} \int_0^\infty z^{s'-1} \frac{1}{e^{-z} - 1} dz \right\}$$

Para la segunda integral, se redefinen los límites $\infty - 0i < z < \infty + 0i$ y se tiene en cuenta la siguiente relación (**Ver Apéndice B**):

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \oint \frac{z^{s-1}}{e^{-z} - 1} dz$$

Tenemos

$$= \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(1-s')} \left\{ \Gamma(s') \zeta(s') + \frac{2\pi i}{\Gamma(1-s')} \zeta(s') \right\}$$

Para las energías se busca $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \zeta(-1/2)$

Entonces con $s' = -1/2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(3/2)} \left\{ \Gamma(-1/2) \zeta(-1/2) + \frac{2\pi i}{\Gamma(3/2)} \zeta(-1/2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{L_1 L_2 L_3}{4\pi^2(3/2)} \left\{ -2\sqrt{\pi}(-0,207886) + \frac{2\pi i}{\sqrt{\pi}/2}(-0,207886) \right\} \\ &= L_1 L_2 L_3 \{0,0062222 - 0,0124445i\} \end{aligned}$$

3.3. Análisis de resultados

3.3.1. Comparación con la energía oscura observada

A continuación se presenta una tabla resumida de las densidades de energía encontradas, las cuales se desarrollan en unidades naturales para ser comparadas con 1.13, cabe decir que los valores hallados se evalúan sobre 1 m^3 :

Densidad de energía ρ en GeV^4	
T^3	$-3,95 \times 10^{-64}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	-1.03439×10^{-65}
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	-1.03439×10^{-65}
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3 \rightarrow \infty}$	-7.12377×10^{-64}

Tabla 4: Valores de densidad de energía hallados originalmente.

Densidad de energía ρ en GeV^4	
T^3	$-7,90214 \times 10^{-64}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	$-8,27508 \times 10^{-65}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	$-6,62008 \times 10^{-65}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3 \rightarrow \infty}$	$-2,88715 \times 10^{-64}$

Tabla 5: Valores de densidad de energía para n pares.

Densidad de energía ρ en GeV^4	
T^3	$1,58043 \times 10^{-63}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	$-5,99945 \times 10^{-64}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty, \infty}$	$-4,79956 \times 10^{-63}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3 \rightarrow \infty}$	$6,93853 \times 10^{-64}$

Tabla 6: Valores de densidad de energía para n impares.

Basados en los datos experimentales [16], en primera instancia los valores tienen una notable disparidad, la diferencia radica en 20 ordenes de magnitud para los datos encontrados sin modificaciones. Aún así, los valores muestran un aporte que no debe ser despreciado dado que las energías que surgen del vacío, aunque tienen un valor muy bajo, al sumar todas estas contribuciones en el espacio-tiempo resulta un valor importante.

Debemos decir que lo verdaderamente complicado, es el signo de la energía resultante para nuestro sistema. El signo en el efecto Casimir como ya fue mencionado, no se puede anticipar sino que surge hasta finalizar todos los cálculos, de aquí que para una variedad toroidal el signo sea negativo, lo cual va en contra posición de una energía expansiva para el universo o por lo menos para un universo con forma toroidal. De allí, que se hagan las modificaciones a los valores posibles de la energía.

Sin embargo, ¿qué implicaciones trae el modificar los valores posibles para la energía?, pregunta que incluye el cuestionarse si el modificar dichos valores posibles, cambia de manera abrupta el sistema propuesto.

3.3.2. Deformación de la variedad

Las tablas de recopilación de datos (Tablas 5 y 6) muestran las energías resultantes de no elegir todos los valores cuantizados del campo, sino que corresponden a la elección de valores enteros pares y enteros impares.

En primer lugar, se analiza el caso para valores pares, los cuales modifican el valor de las energías Casimir en un factor 2^k donde k viene relacionado con el número correspondiente con la función Zeta según sea el sistema. Dicho factor, no tiene modificación alguna para el signo, por lo cual el resultado no es de

gran interés para nuestros fines y además no cambia de manera abrupta el factor de las energías.

Al analizar el caso, en donde se admiten solamente valores impares para las energías, aparecen diversos resultados, en los cuales aparece el signo modificado, hecho que vamos a estudiar a más profundidad.

El polígono fundamental que utilizamos para formar el toro, fue un cuadrado, el cual tenía cada uno de sus bordes orientados de igual sentido u unimos para primero formar un cilindro y luego el toro (ver figura 1.b y figura 3.a).

Si imaginamos, que el campo oscila sobre el plano del cual construimos el toro, podemos generar los modos de oscilación que queramos, pero al poner restricción de que solamente las oscilaciones impares se manifiesten libremente pero las pares no, encontramos que se deben restringir también los bordes del plano donde el campo oscila, de tal manera que estén orientados en diferentes sentidos (ver figura 3.b y figura 4.a).

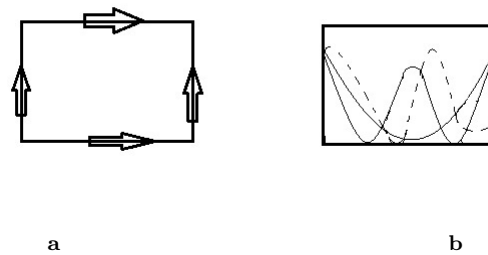


Figura 3: En la primera imagen (a), se puede ver como cada uno de los bordes del polígono inicial para el toro, tiene igual sentido de orientación, por lo cual un campo que oscila allí puede hacerlo en cualquiera de sus modos propios (b)

Esto se debe, a que para una onda par sus puntos inicial y final deben coincidir en el punto e igual sentido, para de esta forma cumplir las condiciones de periodicidad. Mientras para las ondas impares, sus puntos finales se sitúan en caras opuestas, lo cual no da problema cuando se trabaja con sentidos opuestos en los bordes del cuadrado. El tomar estos bordes con sentidos opuestos, genera lo que se conoce como la botella de Klein, dado el caso en que no se hagan coincidir los sentidos de solo dos lados. Figura que es no orientable y abierta, lo que nos hace ver como modificar la topología de la variedad permite encontrar energías positivas para un universo que en principio era toroidal y luego se transforma.

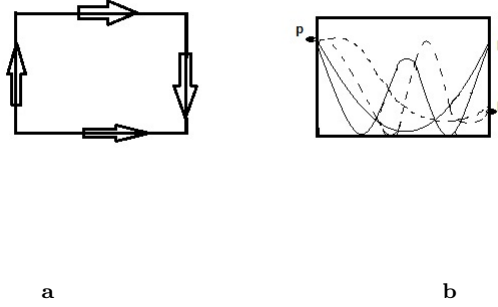


Figura 4: A partir de cambiar la orientación de los bordes izquierdo y derecho (a), encontramos que solamente pueden hacerse coincidir los puntos inicial y final para valores de ondas impares (línea punteada), mientras que los pares (línea seguida) no son posibles de coincidir $p-p'(b)$.

3.3.3. Inestabilidad de la energía

Un sistema que suele desintegrarse con facilidad no tiene espectro discreto. El escapar de un estado o desintegrarse para cierta partícula, significa irse para el infinito, lo que le da características de movimiento infinito al sistema y por lo tanto un espectro continuo. Aun así, pueden existir sistemas que tienen un tiempo de desintegración pequeño pero medible, a este tipo de sistemas se les denomina cuasiestacionarios [15]. Dichos sistemas, presentan partículas que en un intervalo de tiempo τ abandonan el sistema, este intervalo se le llama "vida" del estado casi estacionario con $\tau \sim 1/w$ u w siendo la probabilidad de desintegración por tiempo. Aquí el espectro es cuasidiscreto, se constituye por niveles difuminados y su anchura Γ va relacionada con la vida por $\Gamma \sim \hbar/\tau$. El pensar en estados cuasiestacionarios, implica pensar en partículas que escapan de un sistema y fuera de este toman valores infinitos, desintegrando el estado. Dichos sistemas se representan mediante energías complejas de la forma:

$$E = E_0 - \frac{1}{2}i\Gamma$$

Siendo E_0 y Γ cantidades positivas.

El factor temporal de un estado estacionario, tiene la forma:

$$e^{-(i/\hbar)Et} = e^{-(i/\hbar)E_0t} e^{-(\Gamma/\hbar)t/2}$$

Todas las probabilidades que vienen dadas por los cuadrados de las funciones de onda, vienen determinadas por el factor $e^{-(\Gamma/\hbar)t}$, por lo tanto disminuye la probabilidad de encontrar la partícula en el sistema.

Dicho de otra forma para nuestro caso donde hallamos

$$\varepsilon_0 = \left\{ 0,0062222 - \frac{1}{2}(0,024889)i \right\} L_1 L_2 L_3$$

las energías de este sistema tienen un tiempo de duración dado como τ , el cual nos arroja una probabilidad de desintegración por unidad de tiempo igual a⁵

$$w = \Gamma/\hbar$$

$$w = (0,024889c\hbar)/\hbar$$

$$w = 7,46 \times 10^6 \frac{\text{Probabilidad}}{s}$$

Con un tiempo de vida $\tau \sim 1,339 \times 10^{-7} s$. Lo cual implica que las condiciones en un sistema como este son inestables debido a que muestran un alto grado de probabilidad que se desintegren.

⁵El factor $c\hbar$ que multiplica es para recuperar las unidades naturales de energía

Capítulo 4

Conclusiones

- La búsqueda de la energía oscura, es un problema abierto que sigue aun sin ser resuelto, el postular la energía de Casimir como responsable de dicha energía, puede ser una gran alternativa debido a que surge de efectos cuánticos del vacío. Así pues, para llegar a un resultado valido con el efecto Casimir, es indispensable el encontrar una variedad que arroje datos semejantes a los observacionales.
- Al buscar relacionar la energía del efecto Casimir para $T^3 \times R^1$ con la energía oscura, se puede hacer una buena aproximación modificando los valores posibles de las energías, pero esto se manifestaría de igual forma en modificar la geometría del espacio. Lo cual deformaría totalmente la estructura toroidal para darle paso a una figura geometrica extraña, no orientada, abierta e inclusive que implica otra dimensión. Hecho que promueve también la inclusión de dimensiones extras.
- Las consideraciones hechas para un universo toroidal, nos han enseñado que modificar el espacio de una forma que se puede denominar extraña, puede significar el entender cierta energía del universo. Además, podemos comprender que tomar el universo como un toro que se expande de manera descontrolada en todas sus dimensiones, implica energías inestables con tiempos de decaimientos muy cortos. Lo cual no muestra una verdadera correlación con los datos observacionales que muestran un universo que aun se preserva existente, o al menos este trabajo sirve para comparar realmente el valor de tiempo de vida con el tiempo de vida actual del universo si es que este ultimo es correcto (aprox 14 Gaños).

Capítulo 5

Bibliografía

[1] Carl M. Bender,y Kimball A. Milton. (1994). Scalar Casimir effect for a D-dimensional sphere. *Physical Review D*, 50(10).

[2] Güter Plunien, Berndt Müller,y Walter Greiner. (1985). The Casimir effect. *PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters)*, 134(2-3).

[3] E. Elizalde. (1988). Spectrum of the Casimir effect on a torus. *Z.Phys.C-Particles and Fields*, 44(471-478).

[4] Moos Van Caspel. (2013). The topological Casimir effect on a Torus(Tesis de Maestría). University of British Columbia, Vancouver.

[5] Milton, K.A, (2001), *THE CASIMIR EFFECT Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. USA River Edge, UK London,(2001).

[6] M. Bordage,U. Mohideen, y V.M Mostepanenko. (2000). New developments in the Casimir effect. *Physics Reports*, 353(1-205).

[7] Franz Gross, (1999), *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley-VCH. British Library ,(1999).

[8] Arteaga Guarumo J. A, y Herrera Herrera D. R. (2012). Estudio y comparación de modelos de gravedad modificada $f(R)$ en un universo de-Sitter(Tesis de pregrado). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira.

[9] Kirsten Klaus. Basic zeta functions and some applications in physics. arXiv:1005.2389. (2010).

[10] Tong David. Quantum Field Theory. University of Cambridge. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>.(2006).

[11] Patterson S.J, An introduction to the theory of the Riemann Zeta-function, CAMBRIDGE STUDIES IN ADVANCED MATHEMATICS 14. UK London, (1988).

[12] S.W. HAWKING.(1997). Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime. Communications in Mathematical Physics, Springer-Verlag 1997. University of Cambridge, Cambridge, England.

[13] George Arfken, (1981), *Métodos Matemáticos para físicos*, (María Guadalupe Memije, trad), México: Editorial Diana, S.A .(Obra original publicada en 1981).

[14] P.K. Sang. (2008). Quantum Fluctuations in the inflationary Universe. arXiv.0701399v1.

[15] L.D. Landau, E.M. Lifshitz,(1962), Mecánica cuántica teoría no Relativista, Vol. 3, REVERTE, S.A, España, 1983.

[16] A.L. Edwin.(2016). Cosmología de tiempo tardío para un campo escalar con acoplamiento cinético y de Gauss-Bonnet.(Tesis Doctoral). Universidad del Valle, Cali.

Apéndice A

Función Gamma

Podemos definir la función Gamma ($\Gamma(x)$) como alguna de las siguientes expresiones:

$$\text{a.1) } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\text{a.2) } \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

Si integramos por parte, la primera relación dada para $\Gamma(x)$, tenemos:

$$\text{a.3) } \Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \frac{1}{x} \Gamma(1+x)$$

\therefore

$$\text{a.4) } \Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$$

También

$$\text{a.5) } \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Γ	-3/2	-1/2	1/2	1
Valor	$4\sqrt{\pi}/3$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1

Apéndice B

Identidades para la función Zeta de Riemann

Las siguientes, son identidades utilizadas a lo largo del trabajo en relación a la función Zeta de Riemann.

Se conoce como la función Zeta generalizada o función Zeta de Hurwitz, a la siguiente expresión:

$$\text{b.1)} \quad \zeta_H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

Siempre que $s \in \mathbb{C}$ y además $0 < a < 1$.

Cabe resaltar que la forma general toma la forma usual de Riemann cuando $a = 1$.

Para ciertos valores, es posible conocer una forma de hallar los valores de la función zeta de Riemann. Es el caso de los valores pares positivos¹ y el de los enteros, en general, negativos:

$$\text{b.2)} \quad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{b.3)} \quad \zeta(-n) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \quad \text{siendo } n \geq 1$$

Donde B hace referencia a los números de Bernoulli donde el primer número es $B_0 = 1$ y los demás se definen como:

$$\text{b.4)} \quad B_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{B_i}{n+1-i}$$

Cabe resaltar que la definición para valores enteros negativos, esta se vuel-

¹Forma cerrada de Euler

ve cero en los pares, los cuales se denominan ceros triviales de la función.

Relacionando la función Zeta de Riemann y la función Gamma, podemos obtener la siguiente relación fundamental manteniendo $\Re(s) > 1$:

$$\text{b.5)} \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

La derivada de la función Zeta para los enteros negativos pares, esta dada por:

$$\text{b.6)} \quad \zeta'(-2n) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2(2\pi)^{2n}} \zeta(2n+1)$$

Podemos obtener la extensión a los complejos de la función zeta como sigue:

Definimos la siguiente integral de caminos cerrada en el plano complejo, que viene desde $\infty - 0i$ y que pasa por el origen y va hacia $\infty + 0i$:

$$K = \oint_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Si redefinimos el numerador del argumento en la integral como

$$\begin{aligned} (-z)^{s-1} &= e^{-i\pi(s-1)} x^{s-1} \\ &= (\cos(s-1)\pi - i \sin(s-1)\pi) x^{s-1} \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en K y con límites diferentes dados por $0 < x < \infty$ tenemos:

$$\begin{aligned} &= e^{-i\pi(s-1)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx - e^{i\pi(s-1)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ &= -2i \sin \pi(s-1) \Gamma(s) \zeta(s) \end{aligned}$$

Entonces de aquí que:

$$\zeta(s) = \frac{1}{-2i \sin \pi(s-1)} \frac{1}{\Gamma(s)} \oint_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Y según a.5 concluimos que:

$$\text{b.6)} \quad \zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \oint_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Otra relación importante es definir la función Zeta de Riemann, en función del heat Kernel:

$$\text{b.7) } \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} K(x) dx$$

ζ	0	-1	-3	-5
Valor	-1/2	-1/12	1/120	-1/252

Apéndice C

Cálculo de la energía Casimir

A partir de 1.9, redefinimos la función Zeta según la forma b.7 del Heat Kernel, ésto con el fin de obtener una forma explícita para el parámetro β :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 t} K_{p_s} dt$$

$$\text{donde } K_{p_s} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-E_j^2 t} \sim \sum_{k=0,1/2,1\dots}^{\infty} a_k t^{k-d/2}$$

Siendo $E_j = k$ en 1.9 correspondientes a las energías propias del campo. Para la energía Casimir, buscamos $\zeta'_{P/\mu^2}(0)$ lo que se representa como:

$$\begin{aligned} \zeta'_{P/\mu^2}(0) &= \zeta(0) + \zeta(0) \ln \mu^2 \\ &= -\beta \left(FP\zeta(-1/2) - \frac{a_{D/2}}{\sqrt{4\pi}} [(\ln \mu^2) + 2(1 - \ln 2)] \right) + \\ &\quad \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{-3/2} e^{-\left(\frac{n^2 \beta^2}{4t}\right)} K_{p_s}(t) dt \end{aligned}$$

donde FP representa la parte finita, es decir que se excluye la parte divergente o infinitas en el proceso. La energía se obtiene según 1.10, derivando con respecto a a/β y multiplicando por un factor de $-1/2$.

Finalmente solo se consideran temperaturas bajas $T = 0$, es decir $\beta \rightarrow \infty$ con lo cual llegamos a:

$$E_{Cas} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} E = \frac{1}{2} FP\zeta(-1/2) - \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} a_{D/2} \ln \bar{\mu}^2$$

con $\bar{\mu} = (\mu e/2)$.

El valor $a_{D/2}$ viene relacionado con los polos de la función Zeta y Gamma, cuyo valor es $a_{D/2} = 0$ por lo cual, finalmente tenemos que para las energías Casimir del estado base llegamos a:

$$E_{Cas} = \frac{1}{2}\zeta(-1/2)$$